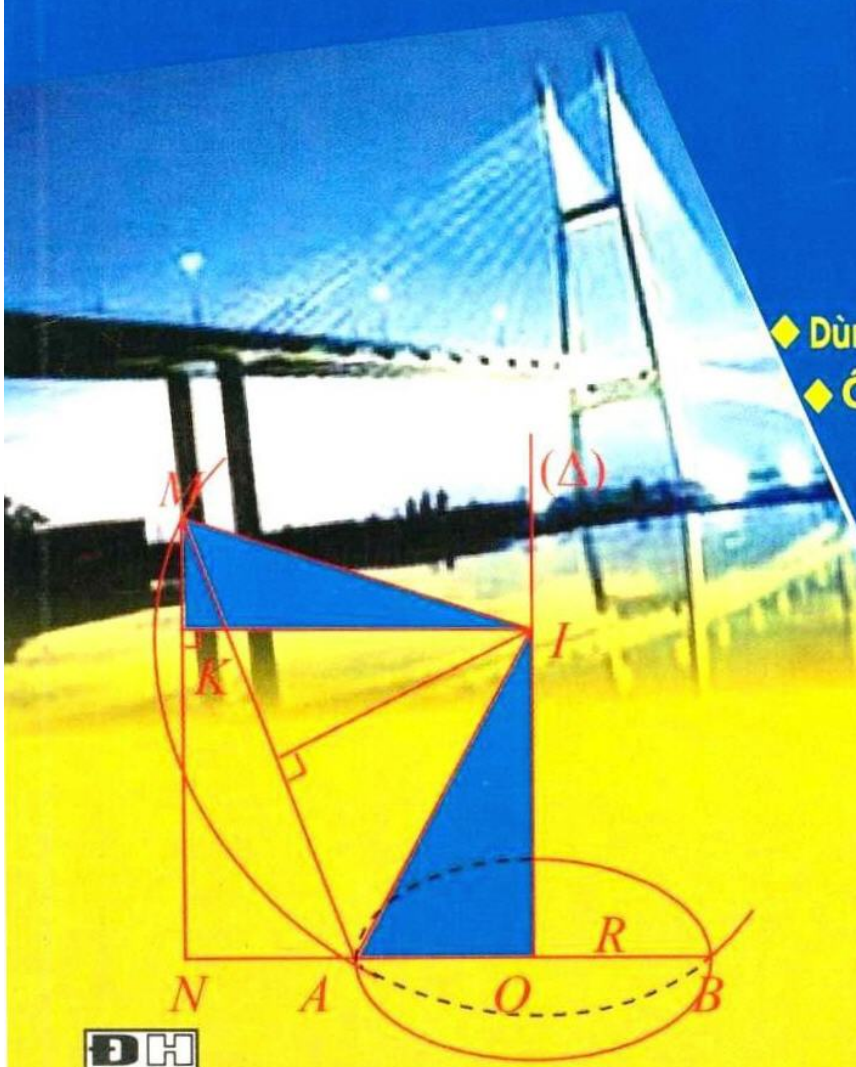
PHẠM QUỐC PHONG
(Nhà Giáo Ưu Tú)

Bồi dưỡng HÌNH HỌC

LỚP 12

◆ Dùng cho HS ban Khoa học Tự nhiên
◆ Ôn thi Tú tài và các kì thi quốc gia



ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẠM QUỐC PHONG
Nhà giáo ưu tú

BỒI DƯỠNG
HÌNH HỌC 12

• ÔN LUYỆN THI TỐT NGHIỆP THPT
VÀ CÁC KÌ THI QUỐC GIA

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI NÓI ĐẦU

Các bạn đang cầm trong tay một trong các cuốn sách thuộc bộ sách Bồi dưỡng Toán THPT (bao gồm Bồi dưỡng Đại số 10, Bồi dưỡng Hình học 10, Bồi dưỡng Đại số & Giải tích 11, Bồi dưỡng Hình học 11, Bồi dưỡng Giải tích 12) do cùng một tác giả biên soạn.

* *

Cũng như các cuốn trước đó, ***Bồi dưỡng Hình học 12*** có những đặc điểm sau đây :

• Hệ thống thí dụ được chọn lọc kĩ lưỡng, có tính điển hình và khai thác tối đa các góc cạnh của mỗi phần kiến thức nhằm giúp các bạn nắm vững nội dung chương trình. Nhiều thí dụ mới mẻ, đó là *tuổi trẻ* của cuốn tài liệu.

Lời giải thí dụ không rườm rà, ngắn gọn trong khoảng 5 - 6 dòng in trong sách. Dẫn dắt tự nhiên, diễn trình theo kiểu "cầm tay chỉ việc" một cách tường minh để mọi đối tượng đều dễ tiếp nhận và hấp thu tối đa kiến thức.

• Nêu bật các *dạng* là kết quả của sự khái quát hoá *xâu chuỗi* nhiều bài toán; đưa ra các *thuật toán* giải chúng đó là điều *có được* của quyển sách này.

• Cắt nghĩa phương pháp giải, vạch rõ bản chất bài toán, bản chất lời giải, liên kết - xâu chuỗi các bài toán là vị trí của những *lời bình*.

• Sách có 3 chương được biên soạn sát đúng với kiến thức chương trình Hình học 12 của bộ GD&ĐT bắt đầu áp dụng từ năm học 2008 – 2009. Hệ thống kiến thức trình bày phù hợp với trình tự thời gian học trên lớp để học sinh tiện theo dõi. Tất cả các chứng minh nêu trong sách được khai thác từ những kiến thức cơ bản được biên soạn trong SGK.

• Sau mỗi phần, sách có hệ thống bài tập tương thích để các bạn rèn luyện và *hoàn thiện hiểu biết* của mình. Nên nhớ rằng, kiến thức chỉ trở thành *hồng cầu* trong cơ thể bạn, nếu bạn thấy mình vượt qua được các bài tập ấy. (Bạn chỉ nên sử dụng phần hướng dẫn giải bài tập ở cuối sách như là để đối chiếu kết quả, hoặc tham khảo cách giải khác, sau khi đã phát huy hết mọi nỗ lực tự giải của mình).

Mặc dù đã rất cố gắng, cuốn sách vẫn có thể còn những hạn chế và thiếu sót bởi kinh nghiệm và sự hiểu biết. Rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của bạn đọc. Mọi góp ý xin liên hệ với tác giả theo địa chỉ sau đây :

Bà Hoàng Thị Tế

Số nhà : 239, đường Nguyễn Ái Quốc, Thị xã Hồng Lĩnh, Tỉnh Hà Tĩnh.

Điện thoại : 039.260713.

Hi vọng cuốn sách là tài liệu bổ ích góp phần nâng cao kiến thức cho mỗi người sử dụng nó.

Hà Tĩnh, tháng 9/2008

Tác giả

PHẠM QUỐC PHONG

Chương I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA NÓ

I. Kiến thức cần nhớ

1) • *Hình đa diện* là hình gồm hữu hạn các đa giác phẳng thỏa mãn hai điều kiện

a) Hai đa giác hoặc không có điểm chung, hoặc có một điểm chung, hoặc có một cạnh chung.

b) Mỗi cạnh chung của hai đa giác là cạnh chung của hai đa giác.

• Mỗi hình đa diện chia không gian thành hai phần : phần bên trong và phần bên ngoài.

• Hình đa diện và phần bên trong của nó gọi là một *khối đa diện*.

2) Một khối đa diện có thể *phân chia* thành các khối tứ diện.

3) Có 5 khối đa diện đều : khối tứ diện đều, khối lập phương, khối 8 mặt đều, khối 12 mặt đều, khối 20 mặt đều.

4) Công thức tính thể tích

Khối	Hộp chữ nhật	Lăng trụ	Chóp, tứ diện
Thể tích	$V = a.b.c$	$V = \mathcal{B}.h$	$V = \frac{1}{3}\mathcal{B}.h$
	a, b, c là ba kích thước	$\mathcal{B}$ là diện tích đáy , còn h là đường cao	

5) Tỉ số thể tích

• Cho hình chóp $S.ABC$. Trên các tia SA, SB, SC lấy lần lượt các điểm A', B', C' khác với điểm S. Khi đó

$$\frac{V(S.A'B'C')}{V(S.ABC)} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

II. Ba dạng toán thường gặp

Dạng 1. Tính thể tích của khối đa diện

• Để tính thể tích của một khối, người ta có thể :

+ Phân chia khối đã cho ra nhiều phần. Tính thể tích từng phần rồi cộng lại.

+ Tính một phần thể tích của khối rồi suy ra thể tích toàn khối.

+ Tạo ra một *khối phụ* chứa khối đã cho. Tính thể tích khối phụ rồi suy ra thể tích khối cần tính. (Cố nhiên thể tích khối phụ tạo ra phải thuận lợi để tính thể tích.)

• Cách vẽ hình phụ trong lời giải nhằm kết nối khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng chéo nhau thành những giả thiết "*đủ thuận lợi*" cho việc tính thể tích trong khối phụ.

Bài toán 1. Tính thể tích khối lăng trụ

Thí dụ 1. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có thể tích bằng 6. Tính thể tích của khối ABB_1C_1.

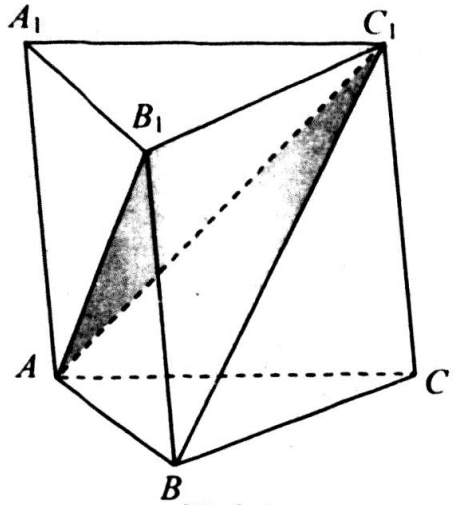
Lời giải

(h.1). Ta có $V_{ABB_1C_1} = V_{C_1.ABB_1} = V_{A.A_1B_1C_1} = V_{C_1.ABC} = V_{C_1.ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC.A_1B_1C_1} = 2$

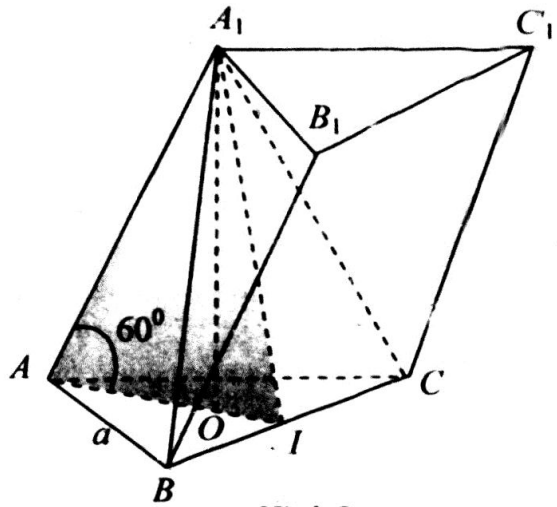
Lời bình: Từ công thức thể tích của lăng trụ và hình chóp ta có :

• Thể tích khối chóp bằng $\frac{1}{3}$ thể tích lăng trụ có cùng *diện tích* đáy và chiều cao.

• Hai mặt chéo của một hình lăng trụ liền kề với một đường chéo của một mặt, chia khối lăng trụ ra ba phần có thể tích tương đương.



Hình 1



Hình 2

Thí dụ 2. Cho lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Điểm A_1 cách đều ba điểm A, B, C. Cạnh bên AA_1 tạo bởi mặt phẳng đáy một góc 60^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải

Diện tích tam giác đều ABC là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.(h.2).

Gọi I là trung điểm BC,O là hình chiếu vuông góc của A_1 trên mặt phẳng (ABC). Theo giả thiết :

+ $A_1A = A_1B = A_1C$ suy ra $OA = OB = OC \Rightarrow O$ là trọng tâm của tam giác đều ABC

$\Rightarrow O \in AI$ và $OA = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

+ $\widehat{A_1AO} = 60^0$.

Trong tam giác A_1OA vuông tại O, $\hat{A} = 60^0$ ta có $A_1O = OA\tan 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = a$.

Kết luận, thể tích của khối lăng trụ là $V = S.A_1O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Thí dụ 3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = 2\sqrt{3}$, $\hat{C} = 60^0$. Đường thẳng BC_1 tạo với mặt bên (AA_1C_1C) một góc 30^0. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải .

(h.3). Ta có $ABC.A_1B_1C_1$ là lăng trụ đứng nên $A_1A \perp (ABC) \Rightarrow A_1A \perp AB$. Theo giả thiết ΔABC là tam giác vuông tại A, tức là $AB \perp BC$.

Từ các điều ấy suy ra $AB \perp (AA_1C_1C) \Rightarrow AB \perp AC$. Do vậy BC là hình chiếu vuông góc của BC_1 trên (AA_1C_1C) nên $\widehat{C_1BC}$ là góc giữa BC_1 và mặt bên (AA_1C_1C). Theo giả thiết $\widehat{BC_1A} = 30^0$.

• Trong tam giác ABC (vuông tại A, $\hat{C} = 60^0$)

ta có $AC = AB\cot 60^0 = 2\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}} = 2.$

Diện tích ΔABC là $S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.2 = 2\sqrt{3}$

- Trong tam giác ABC_1 (vuông tại A, $\widehat{C_1} = 30^0$)

ta có $AC_1 = AB\cot 30^0 = 2\sqrt{3}.\sqrt{3} = 6.$

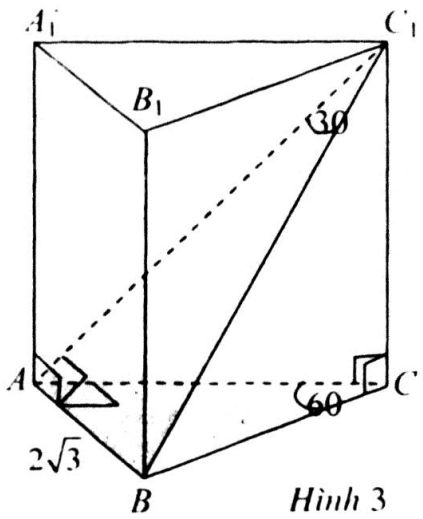
- Trong tam giác AC_1C (vuông tại C) ta có

$C_1C^2 = AC_1^2 - AC^2 = 6^2 - 2^2 = 32$

$\Rightarrow C_1C = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$

- Thể tích khối lăng trụ $ABC.A_1B_1C_1$ là

$V = S.C_1C = 2\sqrt{3}.4\sqrt{2} = 8\sqrt{6}.$



Hình 3

Thí dụ 4. Đáy của lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$. Mặt chéo (A_1BC) tạo với đáy một góc 30^0 và có diện tích bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC.(h.4). Kí hiệu $A_1A = h$, $BC = a$, $IA = m$, $IA_1 = n$. Do ABC là tam giác đều suy ra $IA \perp BC$ và do đó $IA_1 \perp BC$ (định lý ba đường vuông góc).

Từ các giả thiết suy ra $\widehat{A_1IA} = 30^0$.

Trong tam giác đều ABC ta có $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (1)

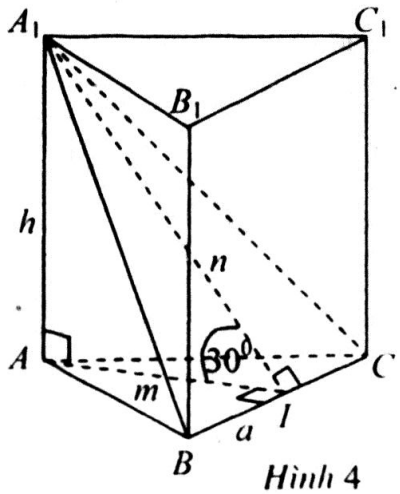
Trong tam giác A_1AI vuông tại A và $\widehat{A_1IA} = 30^0$.

suy ra $n = \frac{m}{\cos 30^0} = \frac{2m}{\sqrt{3}} = a$, $h = m\tan 30^0 = \frac{a}{2}$.

Diện tích tam giác A_1BC là $S_1 = BI.n = \frac{a.a}{2}. = \frac{a^2}{2}$.

Theo giả thiết $S_1 = 8 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2} = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow h = \frac{a}{2} = 2$

Diện tích tam giác đều ABC là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$



Hình 4

Kết luận, thể tích hình lăng trụ cần tính là $V = S_{\Delta ABC}.h = 4\sqrt{3}.2 = 8\sqrt{3}$

Bài toán 2. Tính thể tích khối hộp

Thí dụ 5. Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình bình hành và $\widehat{BCD} = 45^0$. Các đường chéo AC_1 và DB_1 theo thứ tự lần lượt tạo với đáy một góc 45^0 và 60^0. Tính thể tích của khối hộp khi chiều cao của nó bằng 2.

Lời giải

(Đường cao thì đã rõ. Vấn đề là tìm diện tích đáy)

Từ giả thiết suy các cạnh bên vuông góc với đáy và có độ dài bằng 2,

$\widehat{C_1AC} = 45^0$, $\widehat{B_1DB} = 60^0$, $\widehat{ADC} = 135^0$ (h.5).

• Trong tam giác C_1CA vuông cân tại C có $AC = C_1C = 2$.

• Trong tam giác B_1DB vuông tại B có $BD = B_1B\cot 60^0 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

• Áp dụng định lý hàm số cosin lần lượt vào hai tam giác ABD và CBD ta có:

$BD^2 = AB^2 + AD^2 - AB.AD.2\cos 45^0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3} = AB^2 + AD^2 - AB.AD\sqrt{2}$ (1)

$AC^2 = DC^2 + DA^2 - DC.DA.2\cos 135^0$

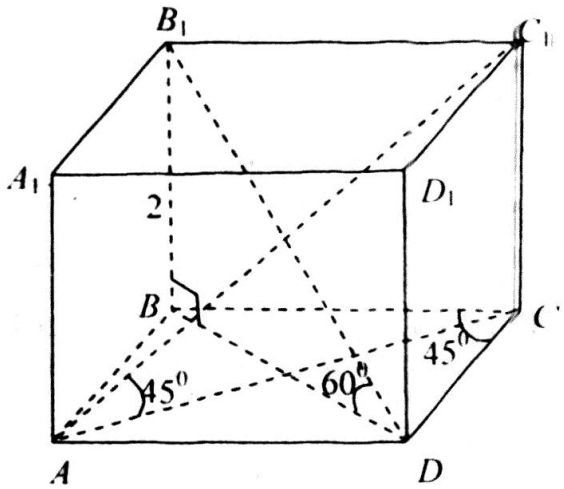
$\overset{AB=DC}{\Leftrightarrow} 4 = AB^2 + DA^2 + AB.AD.\sqrt{2}$ (2)

• Trừ theo từng vế các đẳng thức (2) và (1) ta có : $4 - \dfrac{4}{3} = 2AB.AD\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{4}{3} = AB.AD\sqrt{2} \Leftrightarrow AB.AD = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}$

• Diện tích đáy $ABCD$ là

$S_{ABCD} = AB.AD\sin 45^0 = \dfrac{4}{3\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{3}$



Hình 5

• Thể tích khối hộp là $V = S_{ABCD}.B_1B = \dfrac{2}{3}.2 = \dfrac{4}{3}$.

Lời bình: Bạn có thể thay thế giả thiết biết chiều cao của khối chóp bằng biết độ dài hoặc là một đường chéo hình hộp, hoặc là một đường chéo của mặt $ABCD$. Khi đó bạn có bài toán mới mà cách giải hoàn toàn tương tự.

Thí dụ 6. Cho khối hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy là hình thoi. Diện tích hai mặt chéo ACC_1A_1, BDD_1B_1 lần lượt là s_1 và s_2. Tính thể tích của khối hộp theo s_1 và s_2, biết $\widehat{BA_1D} = 90^0$.

Lời giải

• Gọi S_{ABCD} là diện tích hình thoi $ABCD$ (h.6).

Thể tích của khối chóp là $V = S_{ABCD}.A_1A$ (1)

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$.

Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} s_1 = A_1A.AC \\ s_2 = A_1A.BD \end{cases}$

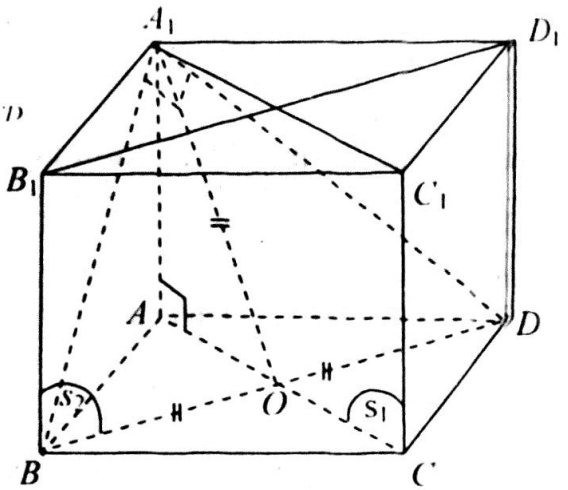
$\Rightarrow s_1.s_2 = A_1A^2.AC.BD \Leftrightarrow s_1.s_2 = A_1A^2.2S_{ABCD}$

$\Leftrightarrow S_{ABCD} = \dfrac{s_1.s_2}{2A_1A^2}$ (2)

• Gọi $O = AC \cap BD$. Theo giả thiết BA_1D là tam giác vuông tại A_1 nên:

$OA_1 = \dfrac{BD}{2}$.

Trong tam giác A_1AO vuông tại A ta có $A_1A^2 = OA_1^2 - OA^2 = \dfrac{BD^2}{4} - \dfrac{AC^2}{4}$



Hình 6

$$\Rightarrow A_1A^4 = A_1A^2\,\frac{BD^2 - AC^2}{4} = \frac{1}{4}\left[(A_1A.BD)^2 - (A_1A.AC)^2\right] = \frac{1}{4}(s_1^2 - s_2^2)$$

$$\Rightarrow A_1A = \sqrt[4]{\frac{1}{4}(s_1^2 - s_2^2)} \qquad (3)$$

Thay (2), (3) vào (1) có $V = \dfrac{s_1.s_2}{2A_1A^2}.A_1A = \dfrac{s_1.s_2}{2A_1A} = \dfrac{s_1.s_2}{2\sqrt[4]{\frac{1}{4}(s_1^2 - s_2^2)}} = \dfrac{s_1.s_2}{\sqrt[4]{4(s_1^2 - s_2^2)}}$

Bài toán 3. Tính thể tích khối chóp

Thí dụ 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, có cạnh đáy bằng a và góc ở đỉnh của mỗi mặt bên bằng 2α. Tính thể tích của khối chóp ấy.

Lời giải

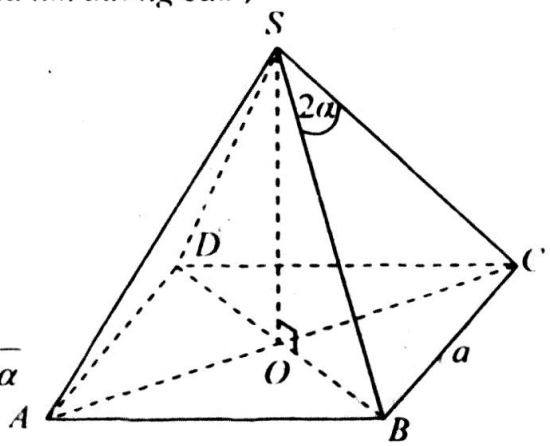
(Diện tích đáy đã rõ. Vấn đề là tìm đường cao)

Gọi $O = AC \cap BD$. (h.7). Từ giả thiết suy ra :

+ O là tâm hình vuông $ABCD$.

+ $SO \perp (ABCD)$.

+ $OB = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Hình 7

• Trong tam giác SBC ta có

$$\frac{SB}{\sin(90^0 - \alpha)} = \frac{BC}{\sin 2\alpha} \text{ hay } \frac{SB}{\cos\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow SB = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

• Trong tam giác SOB vuông tại O, ta có

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = \frac{a^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2\cos 2\alpha}{4\cos^2\alpha} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha}$$

• Thể tích của khối chóp là $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \dfrac{a^2}{3}.\dfrac{a\sqrt{\cos 2\alpha}}{2\cos\alpha} = \dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{6\cos\alpha}$.

Lời bình: Bạn có thể thay thế giả thiết biết cạnh đáy của khối chóp bằng a bằng biết độ dài hoặc là đường cao, hoặc là cạnh bên, hoặc là một đường chéo của đáy $ABCD$. Khi đó bạn có bài toán mới mà cách giải hoàn toàn tương tự.

Thí dụ 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC cân tại A, độ dài đường trung tuyến AD là a, cạnh bên SB tạo với đáy một góc α và tạo với mặt phẳng (SAD) một góc β. Tính thể tích khối chóp.

Lời giải

(h.8). Từ giả thiết suy ra $\widehat{SBA} = \alpha$, $SA \perp BC$. Tam giác ABC cân tại A nên $AD \perp BC$. Kết hợp với $SA \perp BC$ suy ra $BC \perp (SAD)$. Bởi thế SD là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAD) nên $\widehat{BSD} = \beta$.

Trong các tam giác vuông SAB, SAD, BAD ta có $SB = \dfrac{AB}{\cos\alpha} = \dfrac{BD}{\sin\beta}$

$$\Rightarrow SB^2 = \frac{AB^2}{\cos^2\alpha} = \frac{BD^2}{\sin^2\beta} = \frac{AB^2 - BD^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = \frac{AD^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta} = \frac{a^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

$$\Rightarrow SB = \frac{a}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}, \quad BD = SB\sin\beta = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.$$

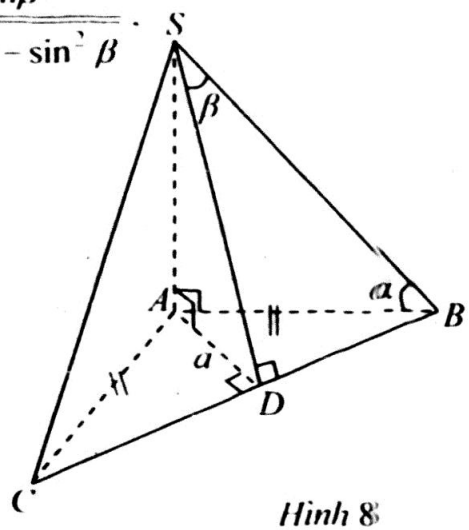
$$SA = SB\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

Thể tích khối chóp là

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}BD.AD.SA \qquad (*)$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{a\sin\beta}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}.a.\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

$$= \frac{a^3\sin\alpha\sin\beta}{3(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)}.$$



Hình 8

Lời bình: Trong Thí dụ trên, $SA \perp BC$ (nghĩa là $(\widehat{SA, BC}) = \alpha = 90^0$) và AD là đoạn thẳng vuông góc vuông chung của cặp cạnh đối diện SA và BC. Từ (*) suy ra $V = \frac{1}{6}SA.BC.AD$ $= \frac{1}{6}SA.BC.AD\sin\alpha$. Đó là một minh hoạ của bài toán trong Thí dụ 9 sau đây :

Thí dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi d là khoảng cách giữa AB và CD và α là góc giữa hai hai đường thẳng đó. Chứng minh $V = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$

Lời giải

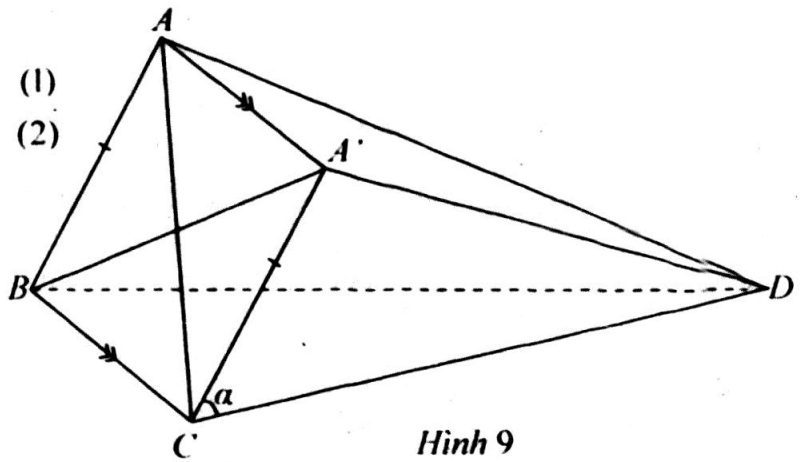
Cách 1. Vẽ hình bình hành $ABCA'$.(h.9).

Theo đó ta có $\begin{cases} AB // A'C & (1) \\ AB = A'C & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow AB//(A'CD)$ nên suy ra :

+ $V_{ABCD} = V_{A'BCD}$

+ Khoảng cách giữa AB và CD bằng khoảng cách giữa điểm A và $(A'CD)$ và bằng d.



Hình 9

+ $\widehat{A'CD} = \alpha$ hoặc $\widehat{A'CD} = \pi - \alpha$.

Do vậy $s_{A'BC} = \frac{1}{2}A'B.CD.\sin\alpha = \frac{1}{2}AB.CD.\sin\alpha$

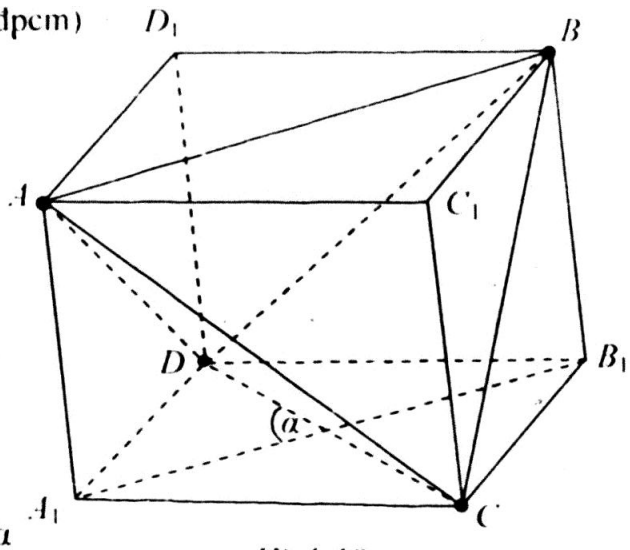
Xem tứ diện $A'BCD$ là khối chóp có đỉnh A' và đáy là ΔBCD. Ta có:

$$V_{A'BCD} = \frac{1}{3}s_{A'BC}.d = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha.$$

Vậy $V_{ABCD} = V_{1ABCD} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha$ (đpcm)

Cách 2. (h.10).

Dựng hình hộp $AC_1BD_1.DA_1CB_1D$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Khi đó (AC_1BD_1) // (DA_1CB_1D) nên khoảng cách giữa AB và CD cũng là khoảng cách giữa (AC_1BD_1) và (DA_1CB_1D) tức là hình hộp tạo ra có đường cao bằng d. Do AB // A_1B_1 nên từ giả thiết suy ra $(\widehat{AB,CD}) = (\widehat{A_1B_1,CD}) = \alpha$



Hình 10

Rõ ràng diện tích đáy DA_1CB_1D là

$$s_{DA_1CB_1} = \frac{1}{2}A_1B_1.CD.\sin\alpha = \frac{1}{2}AB.CD.\sin\alpha$$

$$V_{\text{hộp}} = s_{DA_1CB_1}.d = \frac{1}{2}AB.CD.d.\sin\alpha. \Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{3}V_{\text{hộp}} = \frac{1}{6}AB.CD.d.\sin\alpha \text{ (đpcm)}$$

Lời bình: Trong cả hai cách giải trên đều sử dụng phương pháp vẽ *khối phụ*.(Tạo ra một chứa *khối phụ* khối đã cho. Tính thể tích khối phụ rồi suy ra thể tích khối cần tính.) Cách vẽ hình phụ trong lời giải đã kết nối thành công khoảng cách và góc giữa hai đường thẳng chéo nhau thành những giả thiết "*đủ thuận lợi*" cho việc tính thể tích trong khối phụ.

Thí dụ 10. Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau :
$AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c.$

Lời giải

(h.11).Trong mặt phẳng (BCD) vẽ $\Delta B_1C_1D_1$ sao cho B, C, D theo thứ tự là trung điểm C_1D_1, D_1B_1, B_1C_1. Xét khối tứ diện $AB_1C_1D_1$

Theo giả thiết $c = AD = BC$ (1)

Lại có $BC = \frac{1}{2}C_1B_1$ (đường trung bình của tam giác) (2)

Từ (1), (2) suy ra $AD = \frac{1}{2}C_1B_1$ nên ΔAB_1C_1 là tam giác vuông tại A hay $AC_1 \perp AB_1$.

Tương tự cũng có $AB_1 \perp AD_1$, $AD_1 \perp AC_1$

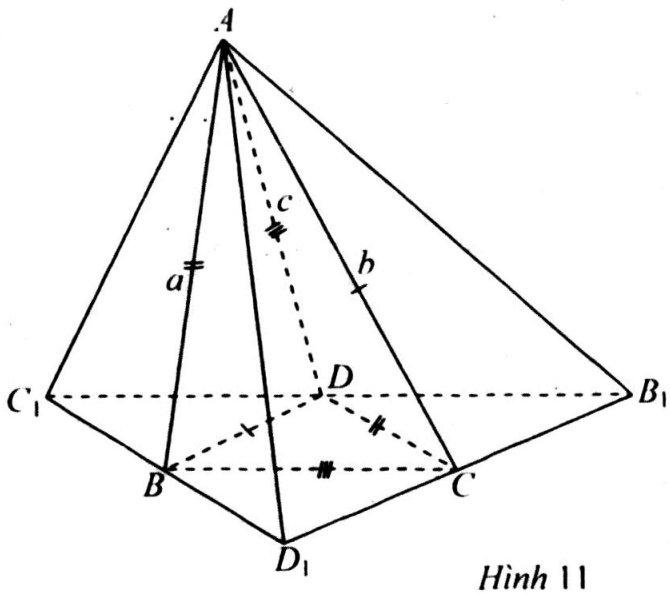
Theo cách vẽ ta có $s_{BCD} = \frac{1}{4}s_{B_1C_1D_1}$

$$\Rightarrow V_{ABCD} = \frac{1}{4}V_{AB_1C_1D_1}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{1}{6}AB_1.AC_1.AD_1 \quad (3)$$

Trong các tam giác vuông B_1AC_1, C_1AD_1, D_1AB_1 ta có:

$$\begin{cases} AB_1^2 + AC_1^2 = B_1C_1^2 = 4c^2 & (4) \\ AB_1^2 + AD_1^2 = B_1D_1^2 = 4b^2 & (5) \\ AC_1^2 + AD_1^2 = C_1D_1^2 = 4a^2 & (6) \end{cases}$$



Hình 11